## STUDIUL OSCILAȚIILOR LIBERE
## ŞI A OSCILAȚIILOR FORȚATE
## FOLOSIND PENDULUL POHL

### 1. Introducere

În această lucrare veți studia caracteristicile mişcării oscilatorii libere şi ale mişcării oscilatorii forțate executate de un sistem oscilant denumit *pendulul Pohl*. Principalele mărimi fizice ce urmează a fi măsurate sunt:

A. În cazul mişcării oscilatorii libere:

- perioada de oscilație şi frecvența proprie a oscilatorului în regim neamortizat,
- perioada şi frecvența proprie a oscilatorului, în prezența amortizării,
- coeficientul de amortizare al mişcării oscilatorii,
- decrementul logaritmic al amortizării oscilațiilor amortizate,
- factorul de calitate al oscilatorului neamortizat şi cu diferite grade de amortizare.

B. În cazul mişcării oscilatorii forțate, în urma trasării curbei de rezonanță a ampolitudinii:

- coeficientul de amortizare al mişcării oscilatorii (comparație cu metoda de la punctul A),
- factorul de calitate al oscilatorului (comparație cu metoda de la punctul A),
- defazajul dintre elongație şi forța exterioară, în condiții de frecvență mai mici, respectiv mai mari decât frecvența de rezonanță.

### 2. Descrierea dispozitivului experimental

Dispozitivul experimental este format, în principal, dintr-o roată[1] din Cu (vezi Fig. 1), montată pe un ax orizontal fixat într-un rulment, astfel ca să poată efectua o rotație oscilatorie, ca urmare a unui moment de revenire asigurat de un resort elastic spiral. Pe cadranul exterior pot fi măsurate unghiurile de rotație ale roții.


**Fig. 1**

Dispozitivul poate funcționa, atât în regim de oscilații libere, cât şi în regim forțat. În primul caz, roata este deviată manual, efectuînd cu grijă o rotație cu un unghi de aproximativ 150°, într-un sens sau altul, urmărind ulterior *dependența de timp a amplitudinii unghiulare, $A(t)$*. În al doilea caz, se pune în funcțiune sistemul electromecanic de forțare a oscilațiilor şi se urmăreşte *dependența amplitudinii unghiulare a oscilațiilor de frecvența oscilațiilor forței exterioare, $A(\Omega)$*. În ambele cazuri, putem controla gradul de amortizare al oscilațiilor, prin reglarea curentului prin frâna electromagnetică.

[1] Un dispozitiv de tipul celui utilizat în acest experiment a fost propus de către fizicianul german A. Pohl, iar aranjamentul experimental este denumit în literatură *pendulul sau roata lui Pohl*.

Schema de alimentare electrică a dispozitivului este prezentată în Fig. 2. Ieşirea de curent continuu a sursei de alimentare de putere se conectează, prin intermediul unui ampermetru, la frâna electromagnetică, folosind un ampermetru pentru măsurarea curentului prin aceasta. Sursa de alimentare de mică putere (adaptor) se foloseşte pentru alimentarea motorului sistemului electromecanic.

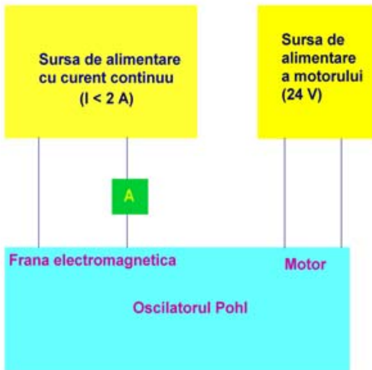


**Fig. 2**

### 3. Principiul fizic al experimentului

### 3A. Oscilațiile libere ale sistemului

Dacă asupra sistemului oscilant acționează, pe lângă momentul de revenire datorat torsiunii în arcul spiral, $M_{tors} = -C\theta$, şi un moment rezistent datorat frânării electromagnetice[2], $M_f = -r\,\omega = -r\,d\theta/dt$, în conformitate cu teorema variației momentului cinetic, între viteza unghiulară instantanee a roții şi momentul exterior rezultant există relația:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_r = M_{tors} + M_f = -C\theta - r\omega \qquad (1)$$

În relațiile de mai sus, $I$ este momentul de inerție al roții, mărimea $C$ este *constanta de torsiune* a resortului spiral, $\theta$ - unghiul de rotație al roții, iar $\omega$ - viteza unghiulară instantanee a acesteia.

Împărțind relația anterioară prin $I$ şi rearanjând termenii obținem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{r}{I}\frac{d\theta}{dt} + \frac{C}{I}\theta = 0 \qquad (2)$$

sau:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad (3)$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\delta = \frac{r}{2I};\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I}} \qquad (4)$$

Ecuația diferențială de ordinul II (4) descrie dependența elongației unghiulare a roții în funcție de timp**.** Soluția acestei ecuații diferențiale în aproximnația amortizării slabe (vezi Anexa 1) este de forma:

$$\theta = \theta_{\max} e^{-\delta t}\sin\left(\omega t + \varphi\right) = \theta_{\max}(t)\sin\left(\omega t + \varphi\right), \qquad (5)$$

unde $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ se numeşte *pulsația mişcării oscilatorii amortizate*[3]. Din relația (5) rezultă că amplitudinea oscilațiilor amortizate descreşte exponențial cu timpul cu rate de descreştere dependente de gradul de amortizare al mişcării (două curbe de variație a lui $\theta_{max}(t)$, corespunzătoare unor amortizări diferite sunt prezentate în Fig. 3).

[2] O astfel de frână foloseşte efectul Lenz al curenților turbionari induşi în materialul roții de către câmpul magnetic.
[3] Mărimea $T = 2\pi/\omega$ reprezintă perioada oscilațiilor amortizate. Ea se mai numeşte şi pseudo-perioadă (deoarece mişcare oscilatorie nu se reia în mod identic).

Raportul a două amplitudini succesive de oscilație, $K$, se numeşte *coeficient de atenuare*, iar logaritmul natural al lui $K$ se numeşte *decrementul logaritmic al amortizării*:

$$K = \frac{\theta_{\max}(t)}{\theta_{\max}(t+T)} \qquad\qquad D = \ln K = \ln \frac{\theta_{\max}(t)}{\theta_{\max}(t+T)} \tag{6}$$

Mişcarea oscilatorie amortizată se stinge cu atât mai repede, cu cât factorul de amortizare, $\delta$, este mai mare. Într-adevăr, într-un interval de timp $\tau = 1/\delta$, numit *constanta de timp a oscilatorului,* amplitudinea oscilațiilor scade de $e$ ori[4]. Într-o perioadă, $T$, a oscilațiilor amortizate, amplitudinea unghiulară scade de $e^{+\delta T}$ ori. Aşadar, $D = \delta\, T$.

Numărul de oscilații efectuat în timpul $\tau$ va fi, deci:

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta \cdot T} = \frac{1}{D} \tag{7}$$

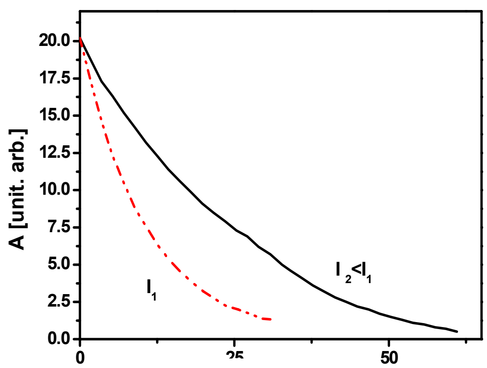

**Fig. 3**

Prin urmare, decrementul logaritmic al amortizării reprezintă numărul de oscilații pe care îl efectuează un oscilator în regim amortizat, pentru ca amplitudinea sa să descrească de $e$ ori. Este evident că un oscilator cu pierderi mici va avea o valoare mică a lui $D$ şi invers. Această mărime este un indiciu al calității oscilatorului adică al capacității acestuia de a efectua oscilații un timp cât mai îndelungat, fară a necesita alimentare cu energie mecanică.

Pentru caracterizarea calității unui oscilator armonic se foloseşte cel mai adesea mărimea:

$$Q = \pi \cdot N = \frac{\omega}{2\delta} \tag{8}$$

care se numeşte *factor de calitate*. Din această relație constatăm că, cu cât factorul de amortizare, $\delta$, este mai mic, cu atât $Q$ este mai mare şi deci oscilatorul este “mai de calitate”. Este uşor de văzut că, după un interval de timp $t_p \cong 5\tau$ amplitudinea oscilațiilor amortizate scade la 1% din valoarea ei maximă. Acest interval de timp se numeşte *durata practică* a procesului de "*stingere*" a oscilațiilor.

**3B. Oscilațiile forțate ale sistemului**

Dacă asupra roții acționează - pe lângă momentele sus-menționate- şi un moment periodic în timp, datorat unei forțe de forma:

$$F_p = F_{p0} \sin \Omega t \tag{8}$$

sistemul execută o *mişcare oscilatorie forțată.* Urmând un raționament similar cu cel anterior, ecuația diferențială a mişcării roții este acum:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_r \tag{9}$$

[4] $e \cong 2{,}71$.

în care momentul rezultant reprezintă suma dintre momentul de torsiune al arcului spiral, $M_{tors} = - C\theta$, momentul (de asemenea rezistent) forțelor de frecare vâscoasă a roții cu aerul, $M_f = - r\,\omega = - r\,d\theta/dt$ şi momentul activ al forței exterioare, $M_e = F_0 R \cos \Omega t$. Am notat aici cu $R$ brațul forței exterioare în raport cu axa de rotație a roții.

Ecuația diferențială a mişcării devine, aşadar:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{r}{I}\frac{d\theta}{dt} + \frac{C}{I}\theta = \frac{F_0 R}{I}\cos\Omega t \qquad (10)$$

sau:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = f_{p0}\cos\Omega t \qquad (11)$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\delta = \frac{r}{2I};\ \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I}};\quad f_{p0} = \frac{F_0 R}{I} \qquad (12)$$

Soluția acestei ecuații diferențiale este de forma (vezi Anexa 2):

$$\theta = \theta_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) + A\sin(\Omega t + \varphi), \qquad (13)$$

adică o suprapunere a soluției mişcării oscilatorii amortizate libere (mişcare pe care ar efectua-o sistemul în absența forței exterioare periodice)

$$\theta_1 = a_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) = a(t)\sin(\omega t + \varphi),$$

la care se adună soluția particulară de forma termenului liber din ec. (3):

$$\theta_2 = A\sin(\Omega t + \varphi) \qquad (14)$$

După trecerea regimului tranzitoriu (după care primul termen din ec. (13) devine neglijabil, sistemul rămâne să execute o mişcare oscilatorie forțată descrisă de ecuația (14). În această ecuație, $A$ şi $\varphi$ reprezintă amplitudinea unghiulară, respectiv faza inițială a oscilațiilor forțate. Ele au următoarele expresii (vezi Anexa 2).

$$A = \frac{f_{p0}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \qquad (15)$$

$$\varphi = \mathrm{arc}\,tg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \qquad (16)$$

Cele două mărimi, $A$ şi $\varphi$, depind, prin urmare, de pulsația, $\Omega$, a forței periodice exterioare. Fenomenul de creştere a amplitudinii oscilațiilor forțate spre o valoare maximă atunci când pulsația forței exterioare se apropie de pulsația oscilațiilor libere, se numeşte *rezonanță a amplitudinii*[5]. Pulsația la care are loc rezonanța se găseşte din condiția $dA/d\Omega = 0$ şi are expresia (vezi Anexa 3).

[5] Aşa cum vom demonstra la curs, există şi un fenomen de rezonanță a energie oscilatorului, care corespunde regimului în care energia totală a primită de oscilator de la mediul înconjurător atinge un maxim.

$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{17}$$

La această valoare a pulsației, amplitudinea oscilațiilor forțate este:

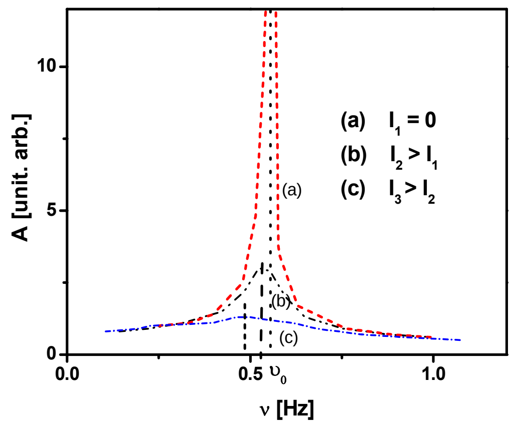


**Fig. 4**

$$A_{max} = \frac{f_{p0}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{f_{p0}}{2\delta\Omega_r} \tag{18}$$

Din aceste relații rezultă că, pe măsura scăderii amortizării, pulsația de rezonanță, $\Omega_{rez}$ se apropie tot mai mult de pulsația proprie, $\omega_0$ a oscilatorului, iar amplitudinea maximă a oscilațiilor forțate tinde asimptotic spre infinit. Prin urmare, pentru amortizări mici $(\delta < \omega_0)$ şi pulsații apropiate de pulsația de rezonanță $(\Omega \cong \Omega_1 \cong \omega \cong \omega_0)$ putem scrie pentru amplitudinea normată, $\alpha = A/A_{max}$, relația:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{19}$$

Folosind ecuația precedentă, să calculăm valorile lui $\Omega$ pentru care $\alpha = \frac{\alpha_{max}}{\sqrt{2}}$. Aceasta se întâmplă la valorile $\Omega_1$ şi $\Omega_2$ ale pulsației, pentru care:

$$\frac{\omega_0}{\Omega_1} - \frac{\Omega_1}{\omega_0} = +\frac{1}{Q}$$

şi:

$$\frac{\omega_0}{\Omega_2} - \frac{\Omega_2}{\omega_0} = -\frac{1}{Q}.$$

Intervalul de pulsații $B = \Omega_2 - \Omega_1$ se numeşte *lărgimea curbei de rezonanță normate.* Din relațiile anterioare rezultă o formulă de calcul a factorului de calitate:

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \tag{20}$$

**4. Modul de lucru:**

**4A. Determinarea parametrilor oscilațiilor amortizate ale sistemului**

(a) *Se determină perioada oscilatiilor amortizate ale sistemului, pentru diferite grade de amortizare* ($I_{frână}$ = 0 A, 0.08 A, 0.12 A, 0.20 A si 0.25 A). Se va lansa de pe Desktop, în acest scop, programul "osc_amor-tizate".

Deviația (rotația) inițială a roții se va face cu multă grijă, urmărind a nu se forța mişcarea roții după alte direcții decât cea de rotație. De asemenea, se va avea grijã ca firul ce face legatura cu poarta opticã sã nu sarã de pe rotitã.

(b) Folosind programul "--osc_amortizate" se va trasa pe pe monitor graficul elongatiei miscarii amortizate in functie de timp.

(c) Din grafic se poate determina pseudoperioada T, vazând timpul în care se efectueazã 10 oscilatii; apoi se se calculeazã valoarea pseudopulsatiei $\omega$.

(d) Se determină coeficienții de relaxare $\delta_{1..5}$, în conformitate cu ec. $\tau = 1/\delta$, discutată anterior. Constanta de timp a oscilatorului $\tau$ se determinã din grafic ca si timpul dupã care amplitudinea scade de $e$ ori.

(e) Se determină valorile decrementului logaritmic al amortizării, în conformitate cu ec. (7).

(h) Se determină, pentru fiecare grad de amortizare, valorile factorului de calitate al oscilatorului, Q, în conformitate cu ec. (8).

(i) Se întocmeşte un raport de măsurători, conform modelului anexat.

**4B. Determinarea parametrilor oscilațiilor forțate ale sistemului**

(a) Se conectează sursele de alimentare la rețea şi se efectuează legăturile electrice conform Fig. 2.

(b) Se alege o valoare $I$ = 0 A (fără frânare electromagnetică). Se determină variația amplitudinii unghiulare, funcție de pulsația forței exterioare. În acest scop, $\Omega$ se va modifica prin modificarea curentului de alimentare al motorului electric (acționând unul din butoanele pentru reglaj grosier, sau fin al turației). Se poate monta un voltmetru în paralel cu motorul electric pentru monitorizarea valorilor tensiunii de alimentare în timpul experimentulu, dacă se doreşte refacerea ulterioară a unor experimente. Amplitudinea unghiulară se citeşte, şi în acest caz, pe scara aparatului, ea fiind exprimată în unități arbitrare. Se va urmări dependența de $\Omega$ a unghiului de defazaj dintre forța exterioară şi elongație, folosind cele două ace indicatoare şi se va verifica tipul de dependență $\varphi(\Omega)$ descris de ec. (16).

SE URMĂREŞTE CU ATENȚIE PARCURGEREA INTERVALULUI DE PULSAȚII CARE SĂ PERMITĂ ULTERIOR TRASAREA ÎNTREGII CURBE DE REZONANȚĂ.

(c) Se repetă operațile de la punctul (b), pentru valorile ale curenților $I$ = 0.08 A şi $I$ = 0.12 A.

(d) Se reprezintă grafic dependențele amplitudinii normate, $\alpha = \theta/\theta_{max}=f(\Omega)$, folosind unul din programele menționate anterior.

(e) Se determină frecvențele $\Omega_1$ şi $\Omega_2$ la care $\alpha$ = 0.707, apoi valoarea lui $B$, şi - în final - a factorului de calitate, $Q$, al oscilatorului, conform ec. (20).

(f) Din valoarea lui B se determină valoarea lui $\delta$, pentru cele 3 regimuri de amortizare a mişcării.

(g) Se compară valorile lui $\delta$ şi ale lui $Q$, găsite la punctele 4A şi 4B.

(h) Se întocmeşte un raport de măsurători, conform modelului anexat.

**A N E X A 1**

În absența unei forțe exterioare care să forțeze oscilația, ecuația diferențială (4) ia forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\delta\frac{d\theta}{dt}+\omega_0^2\theta=0 \qquad \text{(A1.1)}$$

Din motive care vor fi discutate în detaliu la curs, vom încerca o soluție de forma:

$$\theta=\exp\left(\lambda t\right), \qquad \text{(A1.2)}$$

în care λ este un parametru arbitrar. Se introduce această soluție în ecuația (A1.1) şi se obține *ecuația* algebrică *caracteristică*:

$$\lambda^2+2\delta\lambda+\omega_0^2=0 \qquad \text{(A1.3)}$$

Se rezolvă această ecuație pentru a găsi valorile lui λ. După cum discriminantul acestei ecuații $D=\delta^2-\omega_0^2$ este mai mare, egal sau mai mic ca zero, rădăcinile $\lambda_1$ şi $\lambda_2$ sunt reale distincte, reale confundate sau complex-conjugate. Ne interesează acest din urmă caz, când:

$$\lambda_1=-\delta-j\sqrt{-\Delta}=-\delta-j\omega \;\text{ şi }\; \lambda_2=-\delta+j\sqrt{-\Delta}=-\delta+j\omega \qquad \text{(A1.3)}$$

Acestor rădăcini le corespund, conform ec. (A1.2), soluțiile:

$$\theta_1=\exp\left(-\delta-j\omega\right)t \quad \text{şi} \quad \theta_2=\exp\left(-\delta+j\omega\right)t \qquad \text{(A1.4)}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (A1.1) se obține ca o combinația liniară a celor două soluții (A1.4), adică:

$$\theta=a_1\theta_1+a_2\theta_2=\left[\left(a_1\exp\left(-j\omega t\right)+a_2\exp\left(j\omega t\right)\right)\right]\exp\left(-\delta t\right) \qquad \text{(A1.5)}$$

unde $a_1$ şi $a_2$ sunt două constante arbitrare, care se determină după cum urmează:

Ținând cont de formulele lui Euler :

$$\exp\left(-j\omega t\right)=\cos\omega t-j\sin\omega t$$
$$\exp\left(+j\omega t\right)=\cos\omega t+j\sin\omega t$$

şi de condițiile inițiale, $\theta(0)=\theta_0$ și $\omega(0)=\omega_0$ şi folosind notațiile:

$$a_1+a_2=\theta_{\max}\sin\varphi$$
$$j\left(a_1-a_2\right)=\theta_{\max}\cos\varphi$$

se obține soluția generală sub forma:

$$\theta=\theta_{\max}(0)\,e^{-\delta t}\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right) \qquad \text{(A1.6)}$$

(aici φ reprezintă faza inițială a mişcării).

(A1.7)

## ANEXA 2

Constantele arbitrare $\boldsymbol{A}$ şi φ care apar în expresie soluției particulare (10) se determină astfel: se derivează de două ori expresia (10), iar derivatele astfel obținute se introduc în ecuația (5). Se obține astfel egalitatea:

$$\begin{aligned} &A\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\cos\varphi+2\delta\Omega\sin\varphi\right]\sin\Omega t+ \\ &A\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\sin\varphi+2\delta\Omega\cos\varphi\right]\cos\Omega t=f_{p0}\sin\Omega t \end{aligned} \tag{A2.1}$$

Cum membrul drept al acestei egalități nu conține termen în $\cos\Omega\boldsymbol{t}$ rezultă că:

$$\begin{aligned} &\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\sin\varphi-2\delta\Omega\cos\varphi=0 \\ &A\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\cos\varphi+2\delta\Omega\sin\varphi\right]=f_{p0} \end{aligned} \tag{A2.2}$$

Folosind acest ultime două ecuații rezultă expresiile mărimilor $A$ şi φ:

$$A=\frac{f_{p0}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\delta\Omega\right)^2}},$$

$$\varphi=\mathrm{arc}\,tg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right).$$

## A N E X A 3

Pentru ca amplitudinea să devină maximă este necesar ca:

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \tag{A3.1}$$

și

$$\frac{d^2 A}{d\Omega^2} < 0 \tag{A3.2}$$

Întrucât:

$$A = f_{p0}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\delta\Omega\right)^2\right]^{-1/2} \tag{A3.3}$$

rezultă că:

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{f_{p0}}{2}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\delta\Omega\right)^2\right]^{-3/2}\left[2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)(-2\Omega) + \left(2\delta\Omega\right)2\delta\right] = 0 \tag{A3.4}$$

atunci când:

$$\Omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{A3.5}$$

Derivând încă odată expresia lui $dA/d\Omega$ se arată ușor că și condiția a doua este satisfăcută.

***Raport de măsurători***

Numele studentului...........................................
Grupa................................................................
Data efectuării experimentelor.........................

*Rezultate experimentale:*

**4A. Determinarea parametrilor oscilațiilor amortizate ale sistemului**

*Tabelul 1*

| $I$ (A) | 10T (s) | $\omega = 2\pi/T$ ($s^{-1}$) | $\tau$ (s) | $\delta$ ($s^{-1}$) | $K$ (cf. ec. (6a)) | $D$ (cf. ec. (6b)) | $Q$ (cf. ec. (8)) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Graficul $\theta_{max}=f(t)$.

**4B. Determinarea parametrilor oscilațiilor forțate ale sistemului**

*Tabelul II*

$I = 0$ A

| 10 $T$ (s) | $\Omega$ (Hz) | $\theta_{max}$ (unit. arb.) |
|---|---|---|
| ..... | .... | .... |
| | | |

$Q$=......  $\Omega_{rez}$ =....

Graficul $\theta_{max}=f(\Omega)$, având ca parametru cele 3 valori ale amortizării.

*Tabelul III*

$I = 0.08$ A

| 10 $T$ (s) | $\Omega$ (Hz) | $\theta_{max}$ (unit. arb.) |
|---|---|---|
| ..... | .... | .... |
| | | |

$Q$=......  $\Omega_{rez}$ =....

*Tabelul IV*

$I = 0.12$ A

| 10 $T$ (s) | $\Omega$ (Hz) | $\theta_{max}$ (unit. arb.) |
|---|---|---|
| ..... | .... | .... |
| | | |

$Q$=......  $\Omega_{rez}$ =....

***Notă:*** *Pentru fiecare din tabelele II-IV se vor colecta cel putin 15 puncte experimentale.*